

DIVERSIFICADO

PROBLEMA 1

Miguel escribe en una pizarra todos los números enteros positivos menores que diez mil que tienen exactamente dos dígitos unos consecutivos. Determinar cuántos números escribió Miguel.

SOLUCIÓN:

Es fácil ver que los números de la lista tendrán cuatro dígitos y puede tener las siguientes formas

$\overline{11ab}$ donde a tiene 9 posibilidades y b diez. Que son un total de 90

$\overline{a11b}$ donde a tiene 8 posibilidades y b nueve. Que son un total de 72

$\overline{ab11}$ donde a tiene 9 posibilidades y b nueve. Que son un total de 81

Por lo cual el total de números escritos en la pizarra es $90 + 81 + 72 = 243$

PROBLEMA 2

Julio tiene una piscina con capacidad para 2000 litros, que contiene 8 litros. A su disposición tiene dos botones A y B . Al presionar A se aumentan 18 litros a la piscina y al presionar B se extrae 12 litros de la piscina ¿Es posible que luego de presionar varias veces estos botones la piscina tenga 672 litros?

SOLUCIÓN:

Sean a la cantidad de veces que se presionó el botón A y b la cantidad de veces que se presionó el botón B . Su pongamos que luego de esto se logró el objetivo planteado en el problema, entonces

$672 = 8 + 18a - 12b \rightarrow 664 = 18a - 12b \rightarrow 6|664$ lo cual es una contradicción pues $664 = 110 \cdot 6 + 4$. Por tanto queda demostrado que es imposible.

PROBLEMA 3

Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se construyen los triángulos equiláteros ABF y ADE hacia el exterior de $ABCD$. Demostrar que el triángulo FCE es equilátero.

SOLUCIÓN:

Notemos que $\angle CBA = \angle ADC$ y $\angle BAD = 180 - \angle BCA$ por ser $ABCD$ un paralelogramo. Además $\angle DAE = 60 = \angle FAB$, entonces $\angle EAF = 60 + \angle CBA = \angle CBF = \angle EDC$. También es fácil ver que por construcción $AF = BF = CD$ y $AE = BC = DE$.

Entonces los triángulos EAF, CBF y EDC son congruentes por criterio $l.a.l.$ por lo cual $CF = CE = EF$ y queda demostrado que FCE es un triángulo equilátero.

PROBELMA 4

Sea A un cuadrado perfecto. Demuestre que para todo entero positivo n al menos uno de los siguientes números es múltiplo de n .

$$(A + 1)^2 - A, (A + 2)^2 - A, (A + 3)^2 - A, \dots, (A + n)^2 - A,$$

SOLUCIÓN:

Sea $A = a^2$ con a entero no negativo. Notemos que

$$(A + i)^2 - A = (a^2 + i)^2 - a^2 = (a^2 + i - a)(a^2 + i + a)$$

En vista que en la lista $i = \overline{1, n}$ entonces $(a^2 + i - a)$ toma n restos distintos en la división para n de los cuales para algún i será cero, y entonces ese número será múltiplo de n . Entonces queda demostrado.

PROBELEMA 5

Pruebe que para todos los enteros positivos n se cumple que

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2$$

SOLUCIÓN:

Notemos que $2n^2 + 3n + 1 = (n + 1)(2n + 1)$. Luego usando $MA - MG$ obtenemos que

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n} \geq \sqrt[n]{(n!)^2} \rightarrow \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6n} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$$

$$\rightarrow (2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2$$

Entonces queda demostrado.

PROBELMA 6

Sea ABC un triángulo tal que $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Sean M y N los puntos medios de AB y AC , sea I el incentro del triángulo ABC . Pruebe que los puntos A, M, I y N se encuentran sobre una circunferencia.

SOLUCIÓN:

Sea K tal que el triángulo BKN sea isósceles en B y K este sobre BC , entonces CNK es isósceles porque $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Ya que I es inscentro, entonces BI y CI son bisectrices de

los ángulos $\angle KBM$ y $\angle NCK$, respectivamente, entonces BI y CI son mediatrices de MK y NK , respectivamente.

Lo cual implica que I es el circuncentro del triángulo MKN , entonces $\angle NIM = 2\angle NKM$ por ser ángulo central, esto significa que

$$\angle NIM = 2\angle NKM = 2 \left(180 - \left(90 - \frac{\angle CBA}{2} + 90 - \frac{\angle ACB}{2} \right) \right) = \angle CBA + \angle ACB$$

Entonces $\angle BAC + \angle NIM = 180$, lo cual implica que A, M, I y N se encuentran sobre una circunferencia, y se concluye el problema.